## 1.1Походження поняття похідної

Ряд задач диференціального вирахування був вирішений ще в стародавності. Основне поняття диференціального вирахування – поняття похідної – виникло в XVII ст. у зв'язку з необхідністю вирішення ряду задач з фізики, механіки і математики, у першу чергу наступних двох: визначення швидкості прямолінійного нерівномірного руху і побудови дотичної до похідної плоскої кривої.

Перша з цих задач була уперше вирішена Ньютоном. Функцію він називав флюентою, тобто поточною величиною (від латинського fluere - текти), похідну ж - флюксіей (від того ж fluere). Ньютон позначав функції останніми літерами латинського алфавіту *u, x, y, z*, а їх флюксії, тобто похідні від флюент за часом, - відповідно тими ж літерами з крапкою над ними:

Для доказу свого правила Ньютон, випливаючи в основному з Ферма, розглядає нескінченно малий приріст часу *dt,* що він позначав знаком *х0*, відмінним від нуля. Вираз *x0*, що позначається нині і називається диференціалом (*dx*), Ньютон називав моментом. Ньютон прийшов до поняття похідної, виходячи з питань механіки. Свої результати в цій області він виклав у трактаті, названому їм «Метод флюксій і нескінченних рядів», що був складений близько 1671 р. Припускають, що Ньютон відкрив свій метод флюксій ще в середині 60-х років XVII в., однак вищезгаданий його трактат був опублікований посмертно лише в 1736 р.

Математиків XV - XVII ст. довго хвилювало питання про перебування загального методу для побудови дотичної в будь-якій точці кривої. Задача ця була зв'язана також з вивченням рухів тіл і з відшуканням екстремумів найбільших і найменших значень різних функцій.

Деякі окремі випадки вирішення задач були дані ще в стародавності. Так у «Початках» Евкліда дан спосіб побудови дотичної до окружності, Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, Аполлоній - до еліпса, гіперболи і параболи. Однак давньогрецькі вчені не вирішили задачу до кінця, тобто не знайшли загального методу, придатного для побудови дотичної до будь-якої плоскої кривої в похідній її точці. Із самого початку XVII в. чимало вчених, у тому числі Торрічеллі, Вивиани, Роберваль, Барроу, намагалися знайти вирішення питання, прибігаючи до кінематичних міркувань. Перший загальний спосіб побудови дотичної до алгебраїчної кривої був викладений у «Геометрії» Декарта. Більш загального і важливим для розвитку диференціального вирахування був метод побудови дотичних Ферма.

Ґрунтуючись на результатах Ферма і деяких інших висновках, Лейбниц значно повніше своїх попередників вирішив задачу, про яку йде мова, створивши відповідний алгоритм. У нього задача знаходження tg*ϕ* , тобто кутового коефіцієнта дотичної в точці М, до плоскої кривої, обумовленою функцією , зводиться до знаходженню похідної функції *y* по незалежній змінній *x* при даному її значенні (або в даній точці) *x = x1.*

**Теорема 1.***Якщо функція  має в точці х0 локальний екстремум, то або , або не існує.*

# Проте виявляється, що цього недостатньо, бо може , а функція в цій точці екстремуму не має.

Точки, в яких функція  визначена та неперервна, і в цих точках ** або не існує, називаються критичними для функції.

**Приклад 1**. Дослідити на екстремум функцію



*Розв’язання.* Функція визначена і диференційована на R. Знайдемо її похідну:

.

Знайдемо нулі похідної:

х2+х-2=0, х1=-2 х2=1.

Отже, функція *f* має дві критичні точки х1=-2,х2=1.

Оскільки похідна є квадратним тричленом з додатним коефіцієнтом при х2, то на інтервалах  **, а на інтервалі (-2;1) **.

Похідна неперервна на R і при переході через критичну точку змінює знак на протилежний.

Оскільки при переході через критичну точку х=-2 похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція має локальний максимум.

.

При переході через точку х=1 похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тому в цій точці функція *f* має локальний мінімум.



**Приклад 2.** Знайти проміжки зростання та спадання функції

*Розв’язання.* Функція визначена і диференційована на множені R.

Знайдемо її похідну

.

Нулями похідної є х1=1, х2=.

Оскільки похідна неперервна, то вона зберігає знак на інтервалах . Оскільки похідна задана квадратним тричленом з додатним коефіцієнтом при х2, то вона набуває додатних значень поза коренями, тобто на інтервалах  і від’ємних між коренями, тобто  на інтервалі .

Отже , на інтервалах функція *f* зростає, а на інтервалі – спадає.